

新加坡的新数学教材《New Mathematics Counts》

黄翔 童莉 (重庆师范大学 400047)

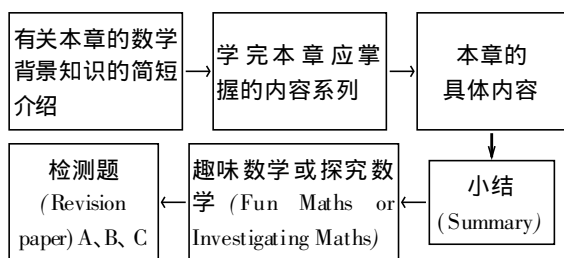
新加坡的数学教育因其在第三次国际数学与科学教育调查(TIMSS, 1996)中位居第一而一直倍受国际数学教育界的关注. 2002年5月, 在新加坡参加第2届东亚数学教育会议(EARCOME2)期间, 笔者购得由其教育部审定, 2002年起使用的新加坡新数学教材一套(New Mathematics Counts, 编著者 Tay Choon Hong, Mark Riddington, Martin Grier), 读后感觉颇有新意, 对我国正在进行的课程改革亦有诸多可借鉴的地方.

1 新数学教材概况

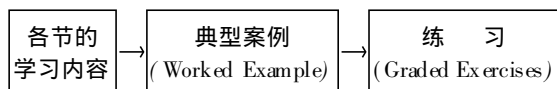
这套新数学教材是按照新加坡最新的数学教学大纲编写的全英文教材, 共5册, 适合于普通中学阶段使用. 1、2、3册的重点在于强调数学的基础知识与基本技能的掌握和应用; 4、5册主要是对前面已学内容的复习和评估考试, 其中4册的考试主要针对新加坡——剑桥的GCE 'N' (General Certificate of Education 'Normal') 水平的考试, 而第5册的评估考试内容主要针对GCE 'O' (General Certificate of Education 'ordinary') 水平测试, 这样不仅使学生能达到GCE 'N' 水平的测试, 也使部分学生能达到'O' 水平测试, 另外, 值得一提的是, 整套教材都贯穿了新加坡教育部所积极倡导实施的三个方面: 思维技能TS(Thing Skills)、信息技术IT(Information Technology) 和国民教育NE(National Education).

2 章节结构及特点

2.1 各章的结构



2.2 各节的结构



2.3 主要特点

该套教材有如下一些显著的特点:

(1) 每章都以一个简短的介绍开头, 内容主要是有关本章的数学背景知识, 激发学生学习的兴趣, 拓宽他们的知识面, 发展他们对数学的认识.

(2) 在每章具体学习内容前列出了该章应掌握的知识系列, 这既可以让在学习前对本章的内容有一个大体了解, 又有利于学生学完该章后对自己所学知识进行自我评价.

(3) 每章末的“趣味数学或探究数学 (Fun Maths or Investigation Maths)”中包含了丰富的数学活动, 给学生提供了广阔的创造空间, 能促进学生思维技巧的发展和创新精神的培养. 另外, 有些活动贯彻了“国民教育”的精神, 有利于培养学生运用所学知识解决国家事务的意识.

(4) 检测题 (Revision paper) 分为A、B、C三个部分, 具有很强的区分性: A 难度较小, 全体学生都应会做; B 中等难度, 适合于中等能力的学生; C 难度较高, 有挑战性, 针对能力强的学生.

(5) 该教材各节内容的呈现方式 (如图) 符合教育学的原理, 即: 抽象的定理或公式通过具体的例子来支持, 让学生经历一个由具体——抽象——具体的过程.

(6) 教材中例题 (Worked Example) 的选择丰富多样, 这不仅加强了学生对定理概念的理解, 而且使学生能接触各种不同类型的问题, 其中的一些问题能帮助学生调控他们的思维, 思考解决问题的策略.

(7) 练习 (Graded Exercises) 所包含的题目可适用于各种水平的学生, 教师可以根据学生的具体情况给学生选择不同的题进行练习, 这些题目能促使学生运用演绎和归纳去解决数学问题.

(8) 在每节教材的正文旁设有一些“注意”内容, 给学生一定的提示, 不仅告诉学生怎样简洁清楚地理解概念定理和公式, 而且给学生提出解题的关键.

3 值得借鉴的几个方面

3.1 数学文化的渗透

数学是人类的一种文化,它的内容、思想、方法和语言是现代文明的重要组成部分.在数学教材中,从文化的角度对数学进行全新的诠释是值得进一步研究的问题.该教材在充分体现了数学的文化价值方面作了有益的探索,比较突出地体现在如下方面:

(1) 在每一章的开头介绍一些与该学习内容有关的生动的数学背景知识,包括数学史实、数学家的故事以及许多数学在现实生活中的广泛应用和数学审美(如下表所列).这不仅使学生对数学的发展过程有所了解,激发他们学习数学的兴趣,还可以使学生体会数学在人类发展历史中的作用和价值.

章名	数学背景知识
方程	“代数之父”古希腊数学家丢番多及其年龄计算的方法
坐标几何	笛卡尔发明直角坐标系的故事
测量	阿基米德测量王冠中含银量的趣事
基础几何	古希腊“几何”一词的含义
乘方与科学记数法	对数表的发明
解直角三角形	毕达哥拉斯定理的有关知识
分数	分数在音乐中应用
变量	电流与电压的关系
全等与相似	估计树高、建筑物高度
统计	用统计表处理家庭经济问题
三角形	解三角形方法在航天、航海中计算距离
坐标几何	笛卡尔叶形线
圆	介绍的建筑中的圆和圆弧

(2) “趣味数学或探究数学”中数学文化的体现.教材在每章末设立了“趣味数学或探究数学(Fun Maths or Investigation Maths)”这一版块,是该教材的一大特色.在该版块中介绍了一些趣味数学的知识或进行了一些数学的探究活动,培养学生对数学的兴趣,发展他们思考的技巧,通过积极参与,让他们体会到数学在实践中的价值(如对“莫比乌斯带”的介绍和实践研究).

(3) “国民教育”中的数学文化的体现.“国民教育”与“思维技巧”、“信息技术”是该教材贯穿的三个精神.“国民教育”积极体现了数学与社会

的关系,培养学生运用数学知识解决国家事务的意识.它的教育目标是:增强社会的凝聚力,发展学生的生存能力和对未来的信心,使之成为好公民.因此,这一部分主要介绍一些新加坡的有关国情知识.(案例1)

案例1 研究2000年5月7日的星期天日报的摘录,“新加坡的人口出生率从1975年起逐年下降.”

年份	1970	1980	1990	1996	1997	1998
人口出生率(每1000名妇女)	3065	1818	1865	1696	1635	1500

问:什么是对新加坡及其居民的负面影响?在过去是怎样克服这些影响的?

用网上搜索的方式找到1998年后的信息,画图来研究整个出生率的发展趋势,和你的同学讨论这一结果,并找出克服这一趋势的方法.

3.2 数学活动的强调

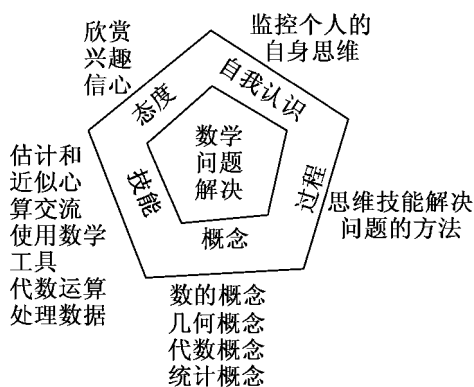
以活动为主线是该教材在呈现方式上的主要特点,不管是知识的获得,还是知识的具体应用都离不开数学活动,这使学生能在各种数学活动中体会到“学数学就是做数学”的思想,并使每个学生都能从观察、实验、归纳、探索等多样化的活动过程中获得各自的数学体验,并建构起自己的认识.具体地说,该教材所涉及的数学活动主要体现在以下三个方面:

(1) 课程内容中的数学活动.在具体的课程学习内容中,通过适当的数学活动导出抽象的定理或规律.如:用几何画板或动态几何软件来探讨相似三角形的面积比、体积比;来研究同弧所对圆心角与圆周角的关系、圆内接四边形的性质、同弧(等弧)所对圆周角的特征;来加深对图形平移、旋转、放大等变换的理解...

(2) “趣味数学或探究数学”中的数学活动.在每章末的“趣味数学或探究数学”中包含了丰富的数学活动,该类活动比前一类活动更具趣味性、实践性和挑战性(如案例1).

(3) “问题解决”中的数学活动.从1990年起“问题解决”一直都是新加坡数学教学大纲的核心理论(如图).

大纲指出:数学课程的基本目的是使学生能发展在数学问题解决上的能力,这里的“问题”不仅包括常规数学问题,而且包括需要运用有关数学知识的开放性探究工作的情景.大纲认为:问题解决能力的高低取决于下图中五个紧密相关的成分——概念、技能、过程、态度和元认知.“问题解决



决”可被看成数学活动的基本形式，该类活动强调的是所学基础知识的应用和策略性知识的掌握。教材在这一部分主要采用的是波利亚的“解题表”，把解决问题分为4个步骤：①理解问题；②制定计划；③执行计划；④回顾反思。（案例2）

案例2 在 8×8 的棋盘中有多少个正方形？

解 ①理解问题。答案不是仅指小正方形的个数，我们必须考虑其它大小的正方形。假如我们考虑每个小正方形的大小是1个单位乘以1个单位，则其它大小的正方形包括： $2 \times 2, 3 \times 3, \dots, 8 \times 8$ 。

②制定计划。把问题简化为考虑 3×3 棋盘的情况，最后得到下表：

正方形的大小	1×1	2×2	3×3
正方形的个数	9	4	1

所以，正方形的总数 = $1 + 4 + 9 = 14$

③执行计划。 1×1 的棋盘仅有1个正方形； 2×2 的棋盘包括1个 2×2 的正方形和4个 1×1 的正方形； 3×3 的棋盘包括1个 3×3 的正方形，4个 2×2 的正方形；9个 1×1 的正方形...归纳为下表：

棋盘大小	正方形的个数	正方形的总数
1×1	1	1
2×2	$1 + 4$	5
3×3	$1 + 4 + 9$	14
4×4	$1 + 4 + 9 + 16$	30
5×5	$1 + 4 + 9 + 16 + 25$	55
6×6	$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$	91
7×7	$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49$	140
8×8	$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$	204

④回顾反思。研究上表的第1列和第2列可

得：正方形个数为 $(1 \times 1) + (2 \times 2) + (3 \times 3) + \dots$ ，所以，我们能归纳出一个 $n \times n$ 的棋盘所含正方形的个数： $(1 \times 1) + (2 \times 2) + (3 \times 3) + \dots + (n \times n)$ 。

综上几种活动形式，结合新加坡数学大纲，我们可以看出教材中数学活动的目的是为了发展思维技能(TS)，它包括：分类、比较、鉴别属性和成分、排序、归纳、演绎、综合、证明、空间想象，并让学生利用信息技术去探究问题的解答。

3.3 信息技术的运用

这是该教材的又一大特色，教材中的许多地方都涉及信息技术的运用，这给学生提供了丰富的学习环境和资源，使学生能更简洁直观地理解所学内容，并帮助他们推导出定理或规则，掌握利用信息技术处理问题的技巧，它主要包括以下三方面：

(1) 计算器的使用。

虽然该教材注重估算、心算等技能的学习，但并不排斥计算器的使用，使用计算器来解决较为繁杂的计算问题。在课堂教学、课外作业、实践活动以及考试中，都允许学生使用计算器还鼓励学生用计算器进行探索规律等活动(案例3)。这使学生节约了繁锁的计算的时间，而把精力花在问题的思考和探索上。

案例3

- 画一个三角形 ABC ，使 $AB = 7\text{cm}$ ， $\angle A = 35^\circ$ ， $\angle B = 90^\circ$ ；
- 通过精确的测量，找出 BC 的长度；
- 用 BC 除以 AB 得到 $\tan \angle A$ 的值；
- 用计算器验证你的答案。

(2) 网上搜索

网络将是我们今后获得信息的主要途径，在网上很多信息都实现了资源共享。因此，引导学生上网查寻所需资料，对学生今后的发展和适应学习化的社会起着积极的作用。同时，网上搜索还有利于学生树立正确的数学观，即：数学不仅是书本上呈现的知识，而是广泛存在于我们的生活空间，拥有非常丰富的信息载体，学生应通过自主的学习行为去领略书本以外的数学世界。(案例4)

案例4 在网上用“搜索”功能来查寻更多的关于黄金分割的知识。在“搜索”框中填上“菲不拉契”或“黄金分割”，看看能得出什么结果。

(注：这是在“探究数学”中介绍了一些关于黄金分割的知识后，要求学生完成的任务。它有助于让学生掌握上网搜索的方法，并且还可以丰富学生关于黄金分割的认识。)

圆锥曲线的准线切线焦点弦的相关性

邱昌银 (浙江温州师范学院茶山校区 325035)

文[1]定理5概括了抛物线的准线切线焦点弦的一个相关性. 本文将利用极坐标法证明三种圆锥曲线的准线切线焦点弦的几个相关性质.

1 极坐标系中的直线方程

引理1 在极坐标系中, 过两点 $A(\rho_1, \alpha)$, $B(\rho_2, \beta)$ 的直线方程(两点式)为

$$\rho_1 \rho_2 \sin(\theta - \beta) = \rho \rho_1 \sin(\theta - \alpha) + \rho_1 \rho_2 \sin(\alpha - \beta),$$

或 $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\rho} = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\rho_2} + \frac{\sin(\theta - \beta)}{\rho_1}$ (不经过极点时 $\rho_1 \rho_2 \neq 0$). 证明略.

引理2 在极坐标系中, 过点 $A(\rho_1, \alpha)$, 斜率为 k 的直线方程(点斜式)为 $\rho \sin \theta - k \rho \cos \theta = \rho_1 \sin \alpha - k \rho_1 \cos \alpha$.

引理3 $A(\rho_1, \alpha)$, $B(\rho_2, \beta)$ 为圆锥曲线 $\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$ 上任意两点, AB 不经过极点, 则直线

$$AB \text{ 的极坐标方程为 } \rho = \frac{ep}{\lambda - e \cos \theta} \text{ 其中 } \lambda = \frac{\cos(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2})}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

证明 由引理1得,

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\rho} = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\rho_2} + \frac{\sin(\theta - \beta)}{\rho_1} = \frac{\sin(\alpha - \theta)(1 - e \cos \beta) + \sin(\theta - \beta)(1 - e \cos \alpha)}{ep}$$

所以 $\rho = \frac{ep \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \theta) + \sin(\theta - \beta) - e[\sin(\alpha - \theta)\cos \beta + \sin(\theta - \beta)\cos \alpha]}$

(3) 动态几何软件(几何画板)在数学活动中的应用

数学活动中经常都会使用到几何画板或动态几何软件, 如: 作一次函数、二次函数的图像等等. 这既可以使数学表示更加精确, 而且它的动态效果能加深学生对数学知识的理解和掌握, 并使学生感受数学的动态性和趣味性.

由此可见, 信息技术与教育的融合给新加坡的教育开辟了一个新的天地, 给它的教育带来勃

所以 $\rho =$

$$\frac{ep \sin(\alpha - \beta)}{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2}) - e \sin(\alpha - \beta) \cos \theta}$$

记 $\lambda = \frac{\cos(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2})}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$, ($\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \neq 0$),

得 $\rho = \frac{ep}{\lambda - e \cos \theta}$.

所以直线 AB 的极坐标方程为 $\rho = \frac{ep}{\lambda - e \cos \theta}$

其中 $\lambda = \frac{\cos(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2})}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$.

引理4 $A(\rho_1, \alpha)$ 为圆锥曲线 $\rho = \frac{ep}{\lambda - e \cos \theta}$ 上任意一点, 则过点 A 的切线的极坐标方程为

$$\rho = \frac{ep}{\cos(\theta - \alpha) - e \cos \theta}. \text{ (切线是割线的极限, 在引理3中 } \beta = \alpha \text{ 代入即得切线方程)}$$

2 圆锥曲线的准线切线焦点弦的几个相关性质

定理1 AC 是过圆锥曲线的焦点 F 的一条焦点弦, 则两端点 A 、 C 处的切线交点 M 在与该焦点 F 对应的准线 L 上, 而且 $MF \perp AC$.

证明 设 e 为离心率, p 为焦距. 则圆锥曲线 $\rho = \frac{ep}{\lambda - e \cos \theta}$ (1) 的极点(焦点) F 对应的准线 L 方程为 $\rho \cos \theta = -p$.

又设点 A 、 C 的极坐标分别为 (ρ_1, α) , $(\rho_2, \alpha + \pi)$, 点 M 为焦点弦的两端点 A 、 C 处的切线的交

勃的生机, 并且它也是学生学习重要的技能的关键之一, 这些技能对学生未来的生活和发展至关重要, 它们是: 创造性思维、独立学习、终身学习和有效交往的能力.

参考文献

- 1 Tay Choon Hong, Mark Riddington, Martin Grier: New Mathematics Counts, 2001
- 2 Ministry to Education(Singapore): Mathematics Syllabus(Secondary), 1998