明理、哲思、求真: 数学史教育价值三重性*

沈南山[1], 黄 翔[2]
(1. 皖西学院 数理系, 安徽 六安 237012; 2. 重庆师范大学, 重庆市 400047)

摘 要: 数学史进入课程是数学新课程改革的重要理念之一。数学史则是最具权威的课程资源, 具有明理、哲思、求真三重教育价值。具体表现在以下三个方面: (1) 从数学到教育数学: 隐匿数学思维的本源结点; (2) 从绝对主义到拟经验主义: 折射数学是发展的科学与假说; (3) 从概念思维模式到实体世界: 隐喻数学是科学的基础和语言。

关键词: 数学史; 教育价值; 课程资源; 教学本质; 拟经验主义; 假说
中图分类号: G40-09 文献标识码: A 文章编号: 1673-9841(2010)03-0141-05

数学, 源自河谷的古老文明, 绵延上下五千年, 传承着人类最富有理性魅力的科学文化。追溯古今, 每一个数学真理的获得, 都闪耀着人类思想的光辉; 每一个数学问题从绝境中突破, 都折射出数学家的睿智和灵感; 每一个划时代的数学思想及其理论体系的创生, 都孕育着人类科学新的跨越。数学史, 一部恢弘壮丽的数学文明发展史诗, 是人类用实践和智慧铸就的理论丰碑。

数学史进入课程是数学新课程改革的重要理念之一。在课程变革由结构–功能视角向文化–个人视角转变的过程中, 文化融入是师生对课程改革适应性的一个重要因素[1]。对数学学科而言, 数学史是数学文化生成的文库性资源, 是最具权威的课程资源, 具有明理、哲思与求真三重教育价值。(1) 明理: 数学知识从何而来? 数学史展示数学知识的起源、形成与发展过程, 诠释数学知识的源与流; (2) 哲思: 数学是一门什么样的科学? 数学史明晰数学科学的思想脉络和发展趋势, 让学生领悟数学科学的本质, 引发学生对数学观问题自觉地进行哲学沉思, 有利于学生追求真理和尊崇科学品德的形成; (3) 求真: 数学科学有什么用? 数学史引证数学科学伟大的理性力量, 让学生感悟概念思维创生的数学模式对于解析客观物质世界的真理性, 提高学生对数学的科学价值、应用价值、文化价值的认识。

一、从数学到教育数学: 隐匿数学思维的本源结点

(一) 教材: 史学形态向教育形态转化的文本

教材是依据课程标准编写的供师生据以进行教学活动的材料, 具有概括性和简明性。作为教材内容的"教育数学"是已经被标本化了的数学, 省略了概念形成和概念同化的过程。教材的编写多是形式化和演绎化的方式, 既不可能按数学发展顺序编写, 也不可能按难易程度编写。因此, 教材的数学知识结构、概念体系只能是相对完整的。学生在使用教材时, 就会觉得数学知识及其结构的突兀性, 仿佛是"先天预成"的。对此, M·克莱因在《古今数学思想》的绪言中有过精辟论述: 课本上字斟句酌的叙述, 未能表现出数学思维创造过程中的斗争与挣扎、挫折与失败, 以及在建立一个数学结构之前, 数学家所经过的艰苦漫长的努力。对学生而言, 这一切都极有价值……[2]。这段文字表达了一个鲜明的观点: 数学是人类思维创造的结晶, 与"教育数学"有教育形态上的区别。教材具有局限性, 数学教学应寻

* 收稿日期: 2009-11-02
作者简介: 沈南山(1964-), 男, 安徽六安人, 皖西学院数理系, 副教授; 西南大学数学与统计学院, 博士研究生, 主要研究数学课程与教学论。
基金项目: 安徽省高等学校省级自然科学研究项目"基于哲理数学社会系统层次性属性的定量研究与应用"(KJ2009B078Z), 项目负责人: 沈南山; 国家级特色专业建设项目"十一五"国家课题"我国高校应用型人才培养模式研究"(FIB070335-A2-05), 项目负责人: 祝家贵。

找数学知识产生的本源思维结点, 使学生了解数学知识发生和发展的创造性思维过程。

(二) 数学史: 重要的数学教学与课程资源

1. 数学史呈现数学知识的发生、发展与形成过程

数学知识是数学家的思维成果和智慧的结晶, 体现数学家的创造性思维劳动。数学史一般比较详尽地记载了数学知识的发生与发展过程, 是最具权威的课程资源, 在数学史中寻觅数学知识的感性材料, 汲取营养是一条重要的教学思想途径。

第一, 应用数学史, 可以把握数学知识的源与流, 加深对数学知识的理解。中小学数学中的很多问题, 属于“ 教育数学” 范畴, 是经过改写加工而成的, 不可能再现知识的原貌, 学生理解数学知识往往见木不见林, 一知半解, 浅尝辄止。如, 希腊几何作图三大难题、孙子问题、斐波那契数列问题、哥尼斯堡七桥问题等等, 数学家在解决这些问题的过程中, 或提出新的数学定理, 或开创新的数学分支, 只有数学史才能让学生了解这些, 教材中很难找到真正的“ 问题解决” 方法的途径, 或被简单化, 或被进行理想化的编造, 数学知识的本源思想被粉饰得面目全非。第二, 应用数学史, 可以统一概念认识, 把握数学知识的体系性。一标多本是基础教育课程改革的主要特征之一, 教材的多样化也使得各教材概念体系不尽相同。如, “ 函数” 概念, 不同版本教科书对“ 函数” 概念的语言叙述、体例形式、顺序安排几乎都有些差别, 只有数学史才能让学生了解“ 函数” 概念的全貌。学习数学史, 学生对相关数学知识概念有一个比较完整的了解和“ 体系性” 的把握, 知识有了生根的土壤。第三, 应用数学史, 可以体验到真实的数学情境。数学知识概念并不是数学家的“ 神来之笔”, 许多大数学家在解决问题时都走过弯路, 甚至犯过错误, 数学史使学生了解真实的数学家思维, 进而获得数学成功与失败的不同情感体验。例如, 数学史中的一些经典的数学名题是比较理想的教育教学素材, 它或者直接提供了相应数学内容的现实背景, 或者揭示了实质性的数学思想方法, 或者展示了数学家突破重围、创造性解决问题时的艰辛与获得解答时的兴奋。对于学生来说, 这是一种思想上的洗礼与意志上的历练。如, 从阿贝尔到伽罗瓦(一个中学生数学家) 、费马大定理、哥德巴赫猜想、四色问题等, 都是具有优良教育价值的寓思想性和知识性于一体的数学史素材, 对于拓展学生的数学视野, 培养学生的探索精神, 丰富学生的情感体验无疑是十分有益的。

2. 数学史启迪数学思想方法

数学史留下数学家处理数学问题的痕迹, 它或明或暗地吐露数学家处理有关问题的思想和方法, 如归纳推理、概括分析、类比猜想等逻辑思维方法以及跳跃性的直觉思维方法, 这些思想方法正是学生所要效法的。应用数学史, 选择典型的数学史题材, 分析数学家发明发现的心智活动, 透视数学家的脑海里有什么灵光, 对学生学习起到方法论的启迪作用。如: 平行公设与公理化思想; 解析几何的创立与数形结合思想; 康托尔的集合论与无限的思想等等都蕴涵着经典的数学思想方法。

数学知识的产生具有二重性, 即具有“ 明线” 与“ 暗线” 两个层面, 前者是数学知识的发生与发展, 这是可见的; 后者是数学思想方法的生成, 寓数学知识的发生之中。这是“暗箱操作” , 学生对数学家为了解决问题而绞尽脑汁所“ 闪现” 的数学思想方法更有着深深的神秘感。教材在处理数学问题时, 所运用的数学思想方法也几乎是数学家的“ 信手所得” , 但实际上却并非如此。数学家研究问题一般有两种截然不同的心智类型: 一是专注于逻辑与解析, 看似一个诸如“ 角总是可以剖分” 这样简明的问题, 在他们看来, 这个命题根本不是明白的, 需要十分冗长的计算与证明; 一是凭借直觉和图形, 读其著述, 可能疑团顿生, 但道破之后, 便涣然冰释。即是说, 数学家的心智所体现的数学思想方法隐匿在书海之中。高斯说: “ 凡有自尊心的建筑师, 在瑰丽的大厦建成之后, 决不会把脚手架留在那里。” 数学也是如此, 知识和方法相伴而生, 浑然天成。前者是瑰丽的大厦, 后者是“ 脚手架” 。这样相对于知识而言, 数学思想方法就更难从有关著作中展示出来了, 数学史的作用就尤其突出了。无怪乎 M · 克莱因、科朗等对于数学史在数学教育教学中的重要性十分关注。“ 数学史可以提供整个课程的情况, 使课程的内容互相联系, 并且与数学思想的主干联系起来。” [3]

二、从绝对主义到拟经验主义: 折射数学是发展的科学与假说

中小学数学教学实践中, 一般很少深入思考数学的本质。学生潜意识地认为数学是一门严格的科学, 一代又一代的人是在数学是绝对正确的理念下学习和成长的。数学史明确地揭示了这种观念是肤浅的, 数学是人类的思维创造, 是心灵的产物, 它是在不断修正、不断补充的过程中, 蕴含了一代又一代数学家和哲学家的思想观点, 形成和发展

的。对于学生而言,了解这一点是大有裨益的。中学生正处于科学世界观的形成阶段,正确地认识数学,了解数学是怎样的一门学科,对他们树立正确的数学观和科学观,甚至将来升入大学进一步学习,都奠定了良好的认识论基础。过去的课程和教学,忽视数学史在这一方面的作用,把数学看成是绝对真理,对待数学的情感和态度也是僵死的。数学理性精神的"育人"的价值观无法得到体现。新课标把"情感、态度、价值观"纳入教育目标,这些目标是很难应用理性的方式来传授的,只能用"文化浸润"的方式达到"润物细无声"的功效,这样数学史鲜活的教育价值思想自然流淌出来。

(一)数学是怎样一门科学

数学是怎样一门科学,对中学生,甚至教师来说,恐怕很少有人深入思考,这涉及到对数学发展的哲学思想认识。早在20世纪初,对数学严密性与数学基础十分关心的数学家从不同角度审视数学,希望数学在逻辑上不要出问题,并希望能够"一劳永逸地建立数学方法的确实性"。由此产生逻辑主义、直觉主义和形式主义三个典型的学派,他们围绕"数学基础"问题的认识展开激烈的论争。正是这些学派对数学基础问题的相互猛烈抨击和精深的哲学思考,推动了数学科学的发展,逐渐明晰了数学科学的本质。三派论争的观点和主张长篇累牍,在此不再赘述。我们要提及的是,论争的结果使人们深刻认识了数学,这就是各派都认识到他们各自的局限性,主要是看问题的哲学视角不同,似有"盲人摸象"之举,但都对数学发展做出了杰出的贡献。大数学家外尔一语道破:"数学的终极基础和终极意义尚未解决,我们不知道沿着什么方向可以找到最终答案,或者甚至于是否有希望得到一个最终的客观的答案。"[4]4 这一论述蕴涵着深刻的数学本质观。其潜在意义,早在1908年,克莱因在他写的《高观点下的初等数学》就描述得淋漓尽致:"数学已长成参天大树,但它不是从最细的根部开始生长的,也不是只向上生长的,相反,在枝、叶扩展的同时,它的根系向下扎得越来越深……那么,我们就能看出,数学中的基础是没有最终结局的,从另一方面讲,也没有一个最初的起点。"[4]325 这是对数学本质问题的哲学思想的形象隐喻,深刻揭示了数学的本质:数学是发展着的一门学科,无根无底,根深叶茂。

(二)数学是发展的科学与假说

1. *数学是发展的科学*

数学是发展的,这一点毋庸置疑。数学史清晰地告诉我们,数学形成了庞大的理论体系。特别是现代数学突飞猛进,新的数学分支如雨后春笋般的建立起来,数学发展方兴未艾。更值得提及的是,至20世纪70年代初,布尔巴基学派"结构主义"风雨过后,由于社会发展向数学领域提出新的挑战,需要数学应用技术支撑,数学更多地发展核心数学与应用数学,走向数学的"象牙塔工程"。例如,洛伦兹的天气动力学研究——混沌问题;艾滋病的恐怖性流行——建立HIV传播的数学模型;自由市场与全球经济一体化——建立可信的数理经济学与对策论新模型等等。有学者描述:数学象牙塔,既是实在的,又是抽象的;既在现实的客观世界中,又在朦胧的高维空间里。能够进得塔里的数学家便来到另一天地,迷迷茫茫,无边无底,唯一的信仰、向导、准则就是逻辑,沿着逻辑的脉络,他们雕呀雕,偶尔也雕出一个个通向世界的洞,这就是象牙塔的"窗",也是数学有用于现实世界的一个希望之光,正是它们得以使数学家自信……象牙塔工程是需要的,世界需要它不时通过窗孔为之引来逻辑的负熵[5]。数学发展史足以使人信服:数学是推动人类历史前进的科学。

2. *数学是拟经验的*

在鉴赏数学发展成就的同时,我们再回到数学基础问题上来。如前所述,数学的基础性没有也无法解决。反映到理论上来,数学有很多缺陷,"选择公理"就是一例。通俗的"选择公理"是说,如果有一列无限多的糖果盘,总可以从每只糖果盘中取一颗糖,构成一个拼盘。这个定理的内容是直白的,"显然"成立。"选择公理"在大学泛涵分析、拓扑学等许多理论学科都有应用,承认"选择公理"似乎是应该的。可是应用"选择公理",又会出现"巴拿赫怪论"(1924年波兰数学家证明的一个命题:一个球体可以分割为无限个部分,和比它的体积大一倍的球的无限个部分一一对应,并且彼此全等),难道数学能承认"一个球可以和它的两倍全等"吗?显然又不能。"选择公理"用与不用,各有利弊,数学处于两难境地,数学大厦的基础存在裂缝,因而看来,数学也是有错误的,也不是绝对正确的,这对学生数学真理观的形成有很大影响,启迪学生对科学真理观无限的哲学沉思:数学为什么也有错呢?其对立面是思维数学为什么就不能有错呢?!

数学史哲表明:数学绝对主义真理观失败了,数学仍在发展;数学真理确定性丧失了,拟经验主义真理观复兴。数学哲学家拉卡托斯认为,数学既不是经验的,也不是理性的,而是拟经验的(quasiem pirical)[6] 。数学拟经验主义观对我们正确认识数学教学观产生了深刻的影响: 数学教学不能只教僵死的知识, 数学知识是"活性"的。教学首先要教人学会思考, 这是教学方法的金科玉律, 从而新课改倡导探究教学方法有其根深蒂固的数学史思想基础。拉卡托斯在《证明与反驳》中, 以对话体的形式, 虚构了教师在课堂上与学生们讨论正多面体欧拉公式 $V-E+F=2$ 的猜想与发现、证明和反驳的全过程, 形象地展现了数学史上对此问题进行研究探索的真实的历史图景, 以此来挑战和批判以希尔伯特为代表的认为数学等同于形式公理的抽象、把数学哲学与数学史割裂开来的形式主义数学史观。拉卡托斯断论: 非形式、准经验的数学的发展, 并不只靠逐步增加毋庸置疑的定理数目, 而是靠以思辨与批评、证明与反驳之逻辑对最初猜想的持续不断的改进。因此, 从这个意义上, 数学是拟经验的, 是建立在逻辑与直觉基础上的产物, 是科学的假说。

三、从概念思维模式到实体世界: 隐喻数学是科学的基础和语言

(一) 概念思维模式与实体世界的关系

数学史的教育价值还表现在从数学科学的广泛应用性, 让学生感悟到人类理性思维创造的数学对于解析客观物质世界的科学价值。数学史确凿地表明, 数学的基础存在缺陷, 数学的真理性是相对的, 而凭借建立在数学之上的技术, 却使人类成功地登上了月球, 探测了宇宙星系。更美妙绝伦的是, 数学结构乃人类智慧创造的思维结构, 有时是先有了这种知识结构, 然后晚得多才发现它在现实中的应用, 可谓科学的求真与反魅。如:"圆锥曲线的发明为的是要解决祈祷神坛的加倍问题, 结果却变成了诸行星绕太阳环行的轨道。卡尔丹和邦别利所发明的虚数数量, 能够奇怪地描绘出交流电的特点。黎曼的幻想所产生出来的绝对微积分, 变成了相对论的数学方法。而在凯雷和西尔维斯特时代完全是抽象的矩阵, 却可惊奇地适用于由量子论所揭示出的原子的奇异位置。"[7]19 相对论和原子核物理学等领域提供了许多这样的例证。

让我们还来欣赏几个绝例: 广义相对论中, 爱因斯坦预言, 来自恒星的光从太阳近旁掠过时将向太阳一方偏斜, 于是, 从地球上观测到的恒星位置将背离太阳移动。由于光线在空间中总是沿着最短路径传播, 光线路径的弯曲实际上表明引力场的空间是弯曲的。空间弯曲的程度是由宇宙中物质的分布所决定的, 一个区域内的物质密度越大, 空间的曲率也就越大。爱因斯坦并不需要重新发明关于弯曲空间的数学, 他发现一切都已经准备好了: 在此之前半个世纪, 数学家黎曼就研究了弯曲三维空间的问题; 且广义相对论所需要的另一个数学工具张量分析也已经在 19 世纪末初步建立起来了[8]257。无独有偶。量子力学的两种基本形式: 矩阵力学与波动力学的等价性又是一例。1926 年, 奥地利物理学家薛定谔接连发表 6 篇关于量子力学的论文, 致力于用一个全新的数学量——波函数描述微观客体在时空中的定态和运动变化, 并建立起相应的波动方程, 用数学语言表达了在空间以特定形式传播或振动的波的性质, 给出了波函数随空间坐标和时间变化的关系。求解这些偏微分方程得出的本征值就是量子化假设中的分立能级, 对一系列实例得出了与实验相符的理论解。论文还分析了微观系统和宏观的关系, 证明了这种波动力学与矩阵力学在数学上的等价性[7]301 。还有, 正电子的发现过程更是令人叫绝。1930 年, 英国理论物理学家狄拉克发现了描述电子运动的正确方程, 这一发现主要是基于对称性的考虑。但是出人意料的事情发生了: 狄拉克方程预示着存在一个除了负荷外, 每个方面都与电子一样的粒子。以前从未有人观察到这个假设中的"反粒子", 于是实验物理学家们开始去寻找它。1932 年 8 月, 美国物理学家卡尔 · 安德森发现了正电子。人们称这个用数学方法预言而做出的发现是一个"比现实还现实"的优美例子[8]342 。

凡此种种, 我们可以举出许多这样的例证来。这些事例不由使人们追问数学认识论的三个传统的主要问题: 第一, 数学奠基于少数概念或公理之上, 为什么却如此富有成效呢? 第二, 数学具有建构性, 这可能成为数学理论的某些不合理性的根源, 为什么数学仍然具有必然性从而保持着恒常的严格性呢? 第三, 数学具有完全的演绎的性质, 由概念思维产生的数学模式, 为什么最终能与经验或物理现实世界相一致呢? 这些质疑一定程度上能够激起学生浓厚的探究科学奥妙的兴趣, 并会自觉地学习数学史, 寻求数学发生认识论的本源。

(二) 数学是科学的基础和语言

概念思维模式与实体世界的关系如此美妙, 为什么呢? 概括地说, 主体对客观物质世界关系结构的认识是通过数学思维的物质载体——人脑而产生的, 作为"数学概念反映器"(或产生器), 原本是物质组织的最高形式, 再加上数学家的思维方式总是遵循着具有客观性的逻辑规律来进行的, 因此思

维的产物——数学模式与被反映的外界(物质世界的关系结构形式)往往是一致的,而不能相互矛盾。这是数学所以能成为认识和改造世界的有效工具的原因之一[9]。这里的主体是一个哲学范畴,指称"实体"、逻辑判断中的主语/主词、人等多重含义[10]。

对数学认识论传统问题的回答是复杂的,涉及多学科、多理论的精深知识。限于篇幅,我们从两个维度予以"直观"阐释。其一,基于数学认识论,抽象的数学结构无论抽象度多高,仍然是以数学"实体"为载体,只是数学"实体"不再具有本体论上的意义。布尔巴基学派认为,全部数学都可以按照结构的观点来建构。这种结构理论"建构"的开放性,诠释了近代数学结构"实体"意义的本质。近代发生认识论心理学家皮亚杰的认识颇具解释性,他认为数学结构观的改变,最显著的特征是抽象数学与数学"实体"这个术语开始有了联系的新意义。数学"实体"已不是从我们内部或外部一劳永逸地给出的理想客体了,"实体"思维早已拓展为有限和无限维空间了。当数学"实体"从一个水平转移到另一个水平时,它们的功能会不断地改变。对这类"实体"进行的运演得到的数学结构,反过来又成为理论研究的对象,这个过程一直重复下去,任何结构都能按照它的水平变成"实体"[11]。于是我们不难理解,人类思维运演的数学结构能够拟合经验与物理世界是很"自然"的了,因为它具有本源性的"实体"意义,渊源于客观物质世界,只不过认识主体的思维活动内化为运演的形式时,数学结构以符号的形式运演,依存于运演的特性(运算符、运算规则),而不是依存于客体的特性(如位置、联合、排列顺序)罢了。当然,需要说明的是,数学思维结构运演本身扩展了人类思维活动的范围,随着复杂数学思维结构性的增加,不可避免地存在非理性因素,这也是数学理论存在某些不合理性因素的原因之一。其二,从数学语言角度来看,数学结构乃公理化的逻辑运演,逻辑是一种语言,能够把自然世界"思维"形式化,能够进行摹仿、交流和表达思想。而语言是人类所特有的用来表达意思、交流思想的工具。从这个角度讲,数学结构可以解析客观物质世界,直接应用于生产和生活也是"自然"的,因为它符合语言的要求。不但如此,就其结构和内容而言,数学在整个人类科学中,还是一种通用语言,因为它能被每一个"理性世界"所理解。换句话说,每一个"理性世界"都能获得数学的解释性,数学是"理性世界"沟通的桥梁。因此,可以说数学是应用最广泛的"语言",是现实中优于任何其他普通语言的"语言"。概言之,数学是科学(自然科学与社会科学)的基础与语言。

参考文献:

[1] 靳玉乐. 文化——个人视角下教师对新课程改革的适应性探讨[J]. 西南大学学报(社会科学版), 2009(2): 128-133.

[2] 克莱因. 古今数学思想: 第1卷[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1979: 4.

[3] 克莱因. 西方数学中的文化[M]. 张祖贵, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2005: 15.

[4] 克莱因. 数学: 确定性的丧失[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1997.

[5] 高隆昌. 数学及其认识[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 17.

[6] 拉卡托斯. 数学、科学和认识论[M]. 北京: 商务印书馆, 1993: 41.

[7] 丹齐克. 数, 科学的语言[M]. 北京: 商务印书馆, 1985.

[8] 李艳平. 物理学史教程[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[9] 徐利治. 数学方法论选讲[M]. 武汉: 华中科学大学出版社, 2000: 200.

[10] 宋乃庆. 试论可持续发展的教育目标[J]. 西南大学学报(社会科学版), 2009(2) 123-127.

[11] 皮亚杰. 发生认识论原理[M]. 北京: 商务印书馆, 1997: 77-86.

责任编辑　曹　莉

The Triple Natures of Educational Value of Mathematics History: Reasoning, Philosophic Thinking and Truth Pursuing

SHEN Nan-shan, HUANG Xiang
(1. *Department of Mathematics and Physics, West Anhui University, Liuan* 237012, *China*;
2. *Chongqing Normal University, Chongqing* 400047, *China*)

Abstract: Because of the new reform of mathematics curriculum, the mathematics history becomes one part of the course which is the most authoritative curriculum resource. It has three educational values: reasoning, philosophic thinking and truth pursuing. They are reflected through the following three aspects. (1) From mathematics to educational mathematics: hiding the original nodes of mathematics thinking; (2) From absolutism to quasi-empiricalism: reflecting mathematics as the science and hypothesis of development; (3) From conceptual mode to physics space: metaphorizing mathematics as the foundation and language of science.

Key words: history of mathematics; educational value; curriculum resource; nature of mathematics; quasi-empirism; hypothesis